

الدرس الأول

أولاً: التكامل المحدود

ليكن f دالة متغير حقيقي ذات قيم عقدية أي أن

$$(1) \quad f(t) = u(t) + i v(t) \quad a \leq t \leq b$$

نقصد أن الدالة u هي دالة متصلة قطعاً قطعاً $f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

على المجال $[a, b]$ نقول عن دالة u أنها متصلة قطعاً قطعاً على المجال $[a, b]$ إذا كان عدد النقاط التي تكون فيها الدالة غير مستمرة منتهياً

بما أن تكون النهايات من اليمين ومن اليسار موجودة

إذا عند أطراف المجال فالنهاية من اليمين موجودة وعند النهاية موجودة من اليسار

نستنتج أن تكامل الدالة f على المجال $[a, b]$ من خلال العلاقة الأسية

$$(1) \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

$$\text{من هذه العلاقة نستنتج أن} \quad \text{Re} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \text{Re} f(t) dt$$

$$\text{Im} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \text{Im} f(t) dt$$

العلاقة من الطرفين الأسير من العلاقة (1) موجودة

سواءً كان f دالة حقيقية أو عقدية

$$\int_a^b c f(t) dt = c \int_a^b f(t) dt \quad c = c_1 + i c_2$$

نفرض أن $f(t) = u(t) + i v(t)$ حيث

$$c f(t) = (c_1 + i c_2) (u(t) + i v(t))$$

$$= (c_1 u(t) - c_2 v(t)) + i (c_1 v(t) + c_2 u(t))$$

إذاً استناداً إلى العلاقة (1) فإن

$$\int_a^b c f(t) dt = \int_a^b (c_1 u(t) - c_2 v(t)) dt + i \int_a^b (c_1 v(t) + c_2 u(t)) dt$$

وبالتفاده من خواص التكامل في الساحة الحقيقية نجد أن

$$\begin{aligned}
 \int_a^b e^{i\omega t} f(t) dt &= e^{i\omega a} \int_a^b u(t) dt - e^{i\omega b} \int_a^b u(t) dt + i e^{i\omega a} \int_a^b u(t) dt \\
 &\quad + i e^{i\omega b} \int_a^b u(t) dt \\
 &= (e^{i\omega a} - e^{i\omega b}) \int_a^b u(t) dt + i (e^{i\omega a} + e^{i\omega b}) \int_a^b u(t) dt \\
 &= (e^{i\omega a} + i e^{i\omega a} - e^{i\omega b} - i e^{i\omega b}) \left[\int_a^b u(t) dt + i \int_a^b u(t) dt \right] = e^{i\omega a} \int_a^b P(t) dt
 \end{aligned}$$

★ لنفرض ان $\int_a^b P(t) dt$ ما هو الحد العقدي $e^{i\omega a}$
 أي ان $e^{i\omega a} = \int_a^b P(t) dt$
 نكتب طرفي $e^{i\omega a}$ نجد ان

$$r_0 = \int_a^b e^{i\omega a} P(t) dt$$

من هذا نتبع ان

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{i\omega a} P(t)) dt$$

$$\operatorname{Re} z \leq | \operatorname{Re} z | \leq | z|$$

بلاستفادة من هذه المراجعة نجد ان

$$\operatorname{Re} e^{i\omega a} P(t) \leq | \operatorname{Re} e^{i\omega a} P(t) | \leq | e^{i\omega a} P(t) |$$

$$| e^{i\omega a} P(t) | = | e^{i\omega a} | | P(t) | = 1 \cdot | P(t) | = | P(t) |$$

$$\operatorname{Re} e^{i\omega a} P(t) \leq | P(t) |$$

$$\int_a^b \operatorname{Re} e^{i\omega a} P(t) dt \leq \int_a^b | P(t) | dt$$

$$| \int_a^b P(t) dt | \leq \int_a^b | P(t) | dt \quad \Leftarrow r_0 \leq \int_a^b | P(t) | dt$$

★ ملاحظة هامة :

المستطوي : نتوّل عن مجموعة النقاط (x, y) من المستوي العقدي ما يسمّى المستطوي

اذا فرضنا ان $x = x(t)$ و $y = y(t)$

سجل فنحن نأخذ نقطة بالمستطوي + مع المجال $[a, b]$

دعنا نبدأ نعلم المنحني C وبقية نبدأ مع الوسيط المنحني γ ويمكن أن نعرف من المنحني C ~~منحني بسيط~~ بالعلاقة

$$Z(t) = X(t) + iY(t) \quad \text{حيث } t \in [a, b]$$

$$Z(a) = X(a) + iY(a) \quad \text{نقطة بداية المنحني في}$$

$$Z(b) = X(b) + iY(b) \quad \text{ونقطة النهاية في المنحني في}$$

وإذا كان $X = X(t)$ و $Y = Y(t)$ دالة متصلة إذا $Z(t)$ دالة متصلة المنحني البسيط

لنقول عن المنحني C الذي معادلته $Z(t) = X(t) + iY(t)$ أنه منحنى بسيط إذا لم يقطع نفسه

أي إذا كان $t_1 \neq t_2$ فيكون ذلك أن يكون $Z(t_1) \neq Z(t_2)$ ونقول عن المنحني C أنه بسيط مغلق إذا كان

$$t_1 \neq t_2 \implies Z(t_1) \neq Z(t_2), \quad Z(a) = Z(b)$$

ليكن C منحنى بسيط معادلته

$$Z(t) = X(t) + iY(t) \quad \text{حيث } t \in [a, b]$$

نقول عن الدالة $Z(t)$ أنها دالة قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كان $X = X(t)$ و $Y = Y(t)$ دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل $(0,0)$ للعلاقة

$$Z'(t) = X'(t) + iY'(t)$$

نقول عن القوس البسيط C أنه قوس أحادي

إذا وفقط إذا كانت الدالة $Z(t)$ دالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة

$$t \in [a, b] \quad Z'(t) \neq 0$$

وطول القوس البسيط C الذي معادلته $Z(t) = X(t) + iY(t)$ $t \in [a, b]$

$$L = \int_a^b |Z'(t)| dt \quad \text{تعطى بالعلاقة}$$

$$Z(t) = R(t)e^{i\theta(t)} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

هذه المعادلة تسمى معادلة منحنى بسيط أساسي معطى طول القوس

المنحني بالمعادلة السابقة

لنعتبر هنا الدالة $z(t)$ مستمرة والمعادلة (1)

نفرجه أن معادلة الكفاف الذي يصل من z_1 إلى z_2 في

$$z(t) = x(t) + i y(t) \quad \text{حيث } t \in [a, b]$$

نكون متصلة الدالة بالمعادلة الأخيرة

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

بما أن

$$z(t) = x(t) + i y(t) \quad \text{حيث } t \in [a, b]$$

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t)$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))$$

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (u x' - v y' + i (v x' + u y')) dt$$

وبالمعادلة من (1) فإن

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (u x' - v y') dt + i \int_a^b (u y' + v x') dt$$

$$\star \int_C f(z) dz = \int_a^b (u dx - v dy) + i \int_a^b (v dx + u dy)$$

حواشي

$$(1) \quad \int_C f(z) dz = - \int_C \overline{f(z)} dz \quad \text{يمكن الاستدلال على ذلك}$$

$$\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

إذا كان C كفافاً فيمكننا أن نكتب C تحت اثنائيه C في نظام إقليدس

نفسه

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 3 - 2(1)(2) + 4 = 3 - 4 + 4 = 3$$

201 / 1

التمرين

الموضوع

الموضوع

إذا وجد عدد ثابت M حيث أن $|f(x)| \leq M$
 فنقول: $|f(x)| \leq M \Rightarrow |f'(x)| \leq M$
 أي أن $|f'(x)| \leq M$

أي أن صفات صحة تكافؤ الدالة متفرعة على طول كفاف Δ يمكن
 أن يتجاوز المعامل المقدر M لاضرب الكفاف M

مثال

أثبت صحة التكافؤ $|f'(x)| \leq M$

1) C_1 في نقطة x_1 ونقطة x_2 على Δ
 $x_2 = x_1 + \Delta x$

2) C_2 تكون من نقطتين x_1 و x_2 على Δ
 $x_2 = x_1 + \Delta x$

3) C_3 تكون من نقطتين x_1 و x_2 على Δ
 $x_2 = x_1 + \Delta x$

4) C_4 تكون من نقطتين x_1 و x_2 على Δ
 $x_2 = x_1 + \Delta x$

لنأخذ نقطة x_0 على Δ

1) $|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|$

$$y - y_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} x$$

$$f(x) = x(1) = 1 \cdot f(1)$$

$$a \leq t \leq b$$

عزيم أن

$$f(x) = x + 1 \quad a \leq t \leq b \quad y = x + 1$$

$$f(1) = 2$$

دالة $z = z_0$
 دالة $z = z_0$

دالة $z = z_0$

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \quad \text{for } t \in [0, 1]$$

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

دالة $z = z_0$

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

دالة $z = z_0$

$$f(z(t)) = z(t)^2 = (z_0 + t(z_1 - z_0))^2$$

$$f'(z(t)) = 2z(t) = 2(z_0 + t(z_1 - z_0))$$

$$\int_C f'(z) dz = \int_0^1 (2(z_0 + t(z_1 - z_0))) (z_1 - z_0) dt$$

$$= (z_1 - z_0) \int_0^1 (2(z_0 + t(z_1 - z_0))) dt = (z_1 - z_0) \left[2z_0 t + (z_1 - z_0) t^2 \right]_0^1$$

$$= (z_1 - z_0) \left(2z_0 + (z_1 - z_0) \right) = (z_1 - z_0)(z_1 + z_0) = z_1^2 - z_0^2$$

دالة $z = z_0$

دالة $z = z_0$

$$\int_C f'(z) dz = \int_C f'(z) dz = f(z_1) - f(z_0)$$

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) \quad \text{for } t \in [0, 1]$$

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

$$z'(t) = z_1 - z_0$$

$$z(t) = z_0$$

$$f'(z(t)) = 2z(t) = 2(z_0 + t(z_1 - z_0))$$

$$\int_C f'(z) dz = \int_0^1 2(z_0 + t(z_1 - z_0)) (z_1 - z_0) dt = (z_1 - z_0) \int_0^1 (2z_0 + 2t(z_1 - z_0)) dt$$

$$\int_C f'(z) dz = (z_1 - z_0) \left[2z_0 t + (z_1 - z_0) t^2 \right]_0^1 = (z_1 - z_0)(z_1 + z_0) = z_1^2 - z_0^2$$

دالة $z = z_0$



$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

$$z(t) = z_0 + t$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$z'(t) = 1$$

$$f(z(t)) = 8 - z(t)^2 = 8 - (z_0 + t)^2$$

$$\int_0^1 z^2 dz = \int_0^1 (8 - (z_0 + t)^2) dt = \int_0^1 (8 - z_0^2 - 2z_0 t - t^2) dt$$

$$= \left[8t - z_0^2 t - z_0 t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 8 - z_0^2 - z_0 - \frac{1}{3}$$

$$= \left[8t - z_0^2 t - z_0 t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 1(8 - z_0^2) + 1(z_0 - \frac{1}{3}) = \frac{12}{3} + 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 z^2 dz = 8 - \frac{z_0^2}{3} + 4$$

الطلب الثالث

$$\int_C z^3 dz = \int_0^1 z^3 dz + \int_2^1 z^3 dz = \int_0^1 z^3 dz - \int_1^2 z^3 dz$$

$$= \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^1 - \frac{1}{4} z^4 \Big|_1^2$$

أوجد قيمة التكامل

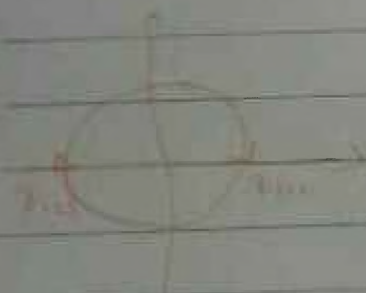
على المنحنى العلوي من الدائرة

التي نصف قطرها 1 و مركزها 1

في المستوى العقدي

والتي تبدأ عند 1 وتنتهي عند 2

في اتجاه عقارب الساعة



$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$f(z) = \bar{z} = x - iy; \quad \cos x - i \sin x$$

التاريخ / / 201

الصفحة

$$z(t) = e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

(121)

$$z(t) = e^{it}$$

مسار في المستوى المركب الدائري في $0 \leq t \leq 2\pi$

هذا المسار هو عبارة عن الدائرة الوحدة في المستوى المركب والتي يعبرها من $z=1$

$$z(t) = e^{it}$$

التي إذاً تكون $0 \leq t \leq 2\pi$

$$z'(t) = i e^{it}$$

$$f(z(t)) = \bar{z} = e^{-it}$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} (i e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} dt = i t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= i (2\pi - 0) = 2\pi i$$

$$z(t) = e^{it}$$

$$\pi \leq t \leq 2\pi$$

مسار في المستوى المركب الدائري

$$z'(t) = i e^{it}$$

$$f(z(t)) = \bar{z} = e^{-it}$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} (i e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} dt$$

$$= i t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{\pi} \bar{z} dz + \int_{\pi}^{2\pi} \bar{z} dz$$

$$= \pi i + \pi i = 2\pi i$$